



TITLE:

# 周期係数2階楕円型方程式のグリーン関数の遠方での漸近形(スペクトル・散乱理論とその周辺)

AUTHOR(S):

村田, 實; 土田, 哲生

---

CITATION:

村田, 實 ...[et al]. 周期係数2階楕円型方程式のグリーン関数の遠方での漸近形(スペクトル・散乱理論とその周辺). 数理解析研究所講究録 2006, 1479: 20-25

ISSUE DATE:

2006-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/58030>

RIGHT:

周期係数 2 階楕円型方程式のグリーン関数の遠方での漸近形

村田 實 (Minoru Murata)

東京工業大・理 Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

土田 哲生 (Tetsuo Tsuchida)

名城大・理工 Department of Mathematics, Meijo University

# 1. Introduction

$\mathbf{R}^d$  での 2 階楕円型作用素

$$L = - \sum_{j,k=1}^d \frac{\partial}{\partial x_k} (a_{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}) + c(x) = -\nabla \cdot a(x) \nabla + c(x),$$

を考える. ただし  $d \geq 2$ ,  $\nabla = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_d)$  and  $a(x) = (a_{jk}(x))_{j,k=1}^d$ . 係数は  $\mathbf{R}^d$  上の実数値関数で  $\mathbf{Z}^d$ -周期, すなわち  $a_{jk}(x+m) = a_{jk}(x)$  と  $c(x+m) = c(x)$  が任意の  $x \in \mathbf{R}^d$  と  $m \in \mathbf{Z}^d$  で成り立つとする.  $a(x)$  は対称な行列値の関数で

$$\mu |\xi|^2 \leq \sum_{j,k=1}^d a_{jk}(x) \xi_j \xi_k \leq \mu^{-1} |\xi|^2, \quad x, \xi \in \mathbf{R}^d, \text{ for some } \mu > 0$$

を満たすとする.  $c \in L_{loc}^p(\mathbf{R}^d)$ ,  $p > d/2$ , を仮定する. このとき  $L$  は定義域が

$$D(L) = \{u \in H^1(\mathbf{R}^d); Lu \in L^2(\mathbf{R}^d)\}$$

の,  $L^2(\mathbf{R}^d)$  での自己共役作用素である.

Bloch の理論をふりかえる.  $\xi \in \mathbf{R}^d$  に対し

$$L(\xi) = e^{-i\xi \cdot x} L e^{i\xi \cdot x} = -(\nabla + i\xi) \cdot a(x) (\nabla + i\xi) + c(x),$$

$$D(L(\xi)) = \{u \in H^1(\mathbf{T}^d); L(\xi)u \in L^2(\mathbf{T}^d)\}$$

とする. このとき  $\{L(\xi)\}$  は analytic family of type (B) ([Ka]) である. また  $L(\xi)$  はコンパクトなレゾルベントをもつ  $L^2(\mathbf{T}^d)$  上の自己共役作用素である.  $L(\xi)$  の固有値を重複をこめて

$$\lambda_1(\xi) \leq \lambda_2(\xi) \leq \dots$$

とする.  $\lambda_n(\xi)$  は連続関数で  $2\pi\mathbf{Z}^d$ -周期をもつ. また  $\lambda_n(\xi) = \lambda_n(-\xi)$  が成立つ.  $L$  のスペクトルは

$$\sigma(L) = \cup_{n=1}^{\infty} \{\lambda_n(\xi); \xi \in (-\pi, \pi]^d\}$$

となる. さらに次が成立する.

- (i)  $\min_{\xi \in \mathbf{R}^d} \lambda_1(\xi) = \lambda_1(0) < \lambda_1(\xi)$  for  $\xi \in [-\pi, \pi]^d \setminus \{0\}$ . [KS]
- (ii)  $\lambda_1(\xi)$  は  $\{\xi \in \mathbf{R}^d; \lambda_1(\xi) < \min_{\xi \in \mathbf{R}^d} \lambda_2(\xi)\}$  で実解析的で, nondegenerate な固有値である.
- (iii)  $\text{Hess} \lambda_1(0)$  は positive definite である. [Pi]

$W_\lambda$  を  $\xi = 0$  を含む  $\{\xi \in \mathbf{R}^d; \lambda_1(\xi) < \lambda\}$  の連結成分とし,

$$\lambda_{conv} := \sup \left\{ \lambda' \leq \min_{\xi \in \mathbf{R}^d} \lambda_2(\xi); \text{ for any } \lambda_1(0) < \lambda < \lambda', \right.$$

(i) Hess  $\lambda_1(\xi)$  is positive definite on  $W_\lambda$ ;

(ii)  $\cup_{m \in \mathbf{Z}^d} (W_\lambda + 2\pi m) = \{\xi \in \mathbf{R}^d; \lambda_1(\xi) < \lambda\}$ .

とおく. そのとき  $\lambda_1(0) < \lambda_{conv}$  であり,  $\lambda_1(0) < \lambda < \lambda_{conv}$  ならば  $\overline{W_\lambda}$  はコンパクトな強凸集合である.  $X_\lambda := \partial W_\lambda$  とおく.  $X_\lambda$  は  $N(\xi) = -\nabla \lambda_1(\xi)/|\nabla \lambda_1(\xi)|$ ,  $\xi \in X_\lambda$ , で向き付けされた超曲面みなし,  $K_\lambda(\xi)$  を  $X_\lambda$  の  $\xi$  でのガウス曲率とする.  $s \in \mathbf{S}^{d-1}$  に対し,  $\xi_s \in X_\lambda$  が  $s = \nabla \lambda(\xi_s)/|\nabla \lambda(\xi_s)|$  となるようにただひとつ存在する.  $u_{\xi_s}(x) \in H^1(\mathbf{T}^d)$  を  $\lambda_1(\xi)$  に対する固有関数, すなわち,  $(L(\xi) - \lambda_1(\xi))u_{\xi_s}(x) = 0$  とする.  $u \in L^2(\mathbf{T}^d)$  に対し  $\|u\|^2 = \int_{\mathbf{T}^d} |u(x)|^2 dx$  とする.  $G_{\lambda \pm i0}^{(k)}(x, y)$  は  $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^k (L - (\lambda \pm i\varepsilon))^{-1}$  の積分核とする. この極限の存在は [Th, GN] においても知られている. つぎの定理が目的である.

**Main Theorem.**  $\lambda_1(0) < \lambda < \lambda_{conv}$  とする.  $|x - y| \rightarrow \infty$  において

$$G_{\lambda+i0}^{(k)}(x, y) = \left( \frac{|x - y|}{|\nabla \lambda_1(\xi_s)|} \right)^k \frac{e^{i\pi(3-d)/4} e^{i(x-y) \cdot \xi_s}}{(2\pi|x - y|)^{(d-1)/2}} \frac{1}{|\nabla \lambda_1(\xi_s)| \sqrt{K_\lambda(\xi_s)}} \frac{u_{\xi_s}(x) \overline{u_{\xi_s}(y)}}{\|u_{\xi_s}\|^2} \\ \times (1 + O(|x - y|^{-1})),$$

がなりたつ, ここで  $s = (x - y)/|x - y|$ .

**Remark 1.**  $\lambda < \lambda_1(0)$  あるいは,  $\lambda = \lambda_1(0)$ ,  $d \geq 3$ , のときは, グリーン関数の漸近形はすでに知られている ([MT]).

**Remark 2.**  $G_{\lambda-i0}(x, y) = \overline{G_{\lambda+i0}(y, x)}$  より,  $G_{\lambda-i0}(x, y)$  の漸近形も求められる.

**Remark 3.** 漸近展開

$$G_{\lambda+i0}(x, y) = \frac{e^{i\pi(3-d)/4} e^{i(x-y) \cdot \xi_s}}{(2\pi|x - y|)^{(d-1)/2}} \frac{1}{|\nabla \lambda_1(\xi_s)| \sqrt{K_\lambda(\xi_s)}} \\ \times \left( \frac{u_{\xi_s}(x) \overline{u_{\xi_s}(y)}}{\|u_{\xi_s}\|^2} + \sum_{j=1}^n \frac{g_j(x, y)}{|x - y|^j} + O(|x - y|^{-n-1}) \right)$$

も停留位相法の高次の項の計算により, 原理的には求められる. 関数  $g_j(x, y)$  は  $\lambda_1(\xi)$  と  $\frac{u_{\xi_s}(x) \overline{u_{\xi_s}(y)}}{\|u_{\xi_s}\|^2}$  の  $\xi = \xi_s$  での導関数で書ける.

## 2. Sketch of the proof

$L^2(\mathbf{R}^d)$  から  $L^2((-\pi, \pi]^d, \frac{d\xi}{(2\pi)^d}; L^2(\mathbf{T}^d))$  への作用素  $\mathcal{U}$  を

$$\mathcal{U}f(\xi, x) := \sum_{m \in \mathbf{Z}^d} f(x - m) e^{-i(x-m) \cdot \xi}$$

で定義する.  $\mathcal{U}$  はユニタリ作用素であり

$$\mathcal{U}^{-1}g(x) := \int_{(-\pi, \pi]^d} e^{ix \cdot \xi} g(\xi, x) \frac{d\xi}{(2\pi)^d}, \quad g(x, \xi) \in L^2((-\pi, \pi]^d; L^2(\mathbf{T}^d))$$

となる.  $\varepsilon > 0$  に対し

$$\begin{aligned} (L - (\lambda + i\varepsilon))^{-1}f(x) &= \mathcal{U}^{-1}(L(\xi) - (\lambda + i\varepsilon))^{-1}\mathcal{U}f(x) \\ &= \int_{(-\pi, \pi]^d} e^{ix \cdot \xi} (L(\xi) - (\lambda + i\varepsilon))^{-1}\mathcal{U}f(x) \frac{d\xi}{(2\pi)^d}, \end{aligned}$$

と書ける. さらに  $\xi$  が  $X_\lambda$  の近傍にあるとき

$$(L(\xi) - (\lambda + i\varepsilon))^{-1} = \frac{P(\xi)}{\lambda_1(\xi) - \lambda - i\varepsilon} + Q_{\lambda+i\varepsilon}(\xi),$$

ただし

$$\begin{aligned} P(\xi) &= \frac{-1}{2\pi i} \oint_{|z' - \lambda| = \delta} (L(\xi) - z')^{-1} dz', \\ Q_z(\xi) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z' - \lambda| = 2\delta} \frac{(L(\xi) - z')^{-1}}{z' - z} dz' \end{aligned}$$

と書く.  $P(\xi)$  は固有空間  $\{u \in L^2(\mathbf{T}^d); (L(\xi) - \lambda_1(\xi))u = 0\}$  への直交射影であるので,  $P(\xi)$  の積分核  $p(\xi; x, y)$  は

$$p(\xi; x, y) = \frac{u_\xi(x) \overline{u_\xi(y)}}{\|u_\xi\|^2}, \quad x, y \in \mathbf{T}^d$$

と書ける. したがって,  $\psi$  を  $X_\lambda$  の近傍での cutoff 関数として,

$$\begin{aligned} G_{\lambda+i\varepsilon}(x, y) &= \int_{(-\pi, \pi]^d} e^{i(x-y) \cdot \xi} \frac{\psi(\xi) p(\xi; x, y)}{\lambda_1(\xi) - \lambda - i\varepsilon} \frac{d\xi}{(2\pi)^d} \\ &+ \int_{(-\pi, \pi]^d} e^{i(x-y) \cdot \xi} \left[ (1 - \psi(\xi)) R(\xi, \lambda + i\varepsilon; x, y) + \psi(\xi) e^{ix \cdot \xi} Q_{\lambda+i\varepsilon}(\xi; x, y) \right] \frac{d\xi}{(2\pi)^d}, \end{aligned}$$

と書ける. ただし  $R(\xi, z; x, y)$  と  $Q_z(\xi; x, y)$  は  $(L(\xi) - z)^{-1}$  と  $Q_z(\xi)$  の積分核である. この第二項は, 任意の  $N$  で  $O(|x - y|^{-N})$  となる. 第一項について述べる. 簡単のため  $d = 2$  とし,  $s = (x - y)/|x - y|$  は  $e_1 = (1, 0)$  の近傍とする.  $\psi(\xi) = \psi_A(\xi) + \psi_{A'}(\xi) + \psi_B(\xi)$  と分ける, ここで  $\psi_A$  は  $\xi_{e_1}$  近傍での cutoff 関数,  $\psi_{A'}$  は  $-\xi_{e_1}$  近傍での cutoff 関数とする. 積分変数を  $(\xi_1, \xi_2) \rightarrow (\xi_1, \eta_2)$  と変換する, ただし  $\eta_2 = \lambda(\xi) - \lambda$ . すると  $\xi_1$  変数に関する部分積分により

$$\begin{aligned} &\int_{(-\pi, \pi]^d} e^{i(x-y) \cdot \xi} \frac{\psi_B(\xi) p(\xi; x, y)}{\lambda_1(\xi) - \lambda - i\varepsilon} \frac{d\xi}{(2\pi)^d} \\ &= \int e^{i|x-y| [s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2(\xi_1, \eta_2)]} \frac{p_B(\xi_1, \eta_2; x, y)}{\eta_2 - i\varepsilon} d\xi_1 d\eta_2 \\ &= (-i|x-y|)^{-N} \int e^{i|x-y| [s_1 \xi_1 + s_2 \xi_2(\xi_1, \eta_2)]} \frac{T^N p_B(\xi_1, \eta_2; x, y)}{\eta_2 - i\varepsilon} d\xi_1 d\eta_2 \\ &= O(|x-y|)^{-N} \quad \text{for } (x-y)/|x-y| \sim e_1; \end{aligned}$$

となる。ここで、 $T$  はある微分作用素で、また上の計算で  $\partial_{\xi_1}[s_1\xi_1 + s_2\xi_2(\xi_1, \eta_2)] \neq 0$  を用いた。

$\eta_1 = \lambda_1(\xi) - \lambda$  とする変数変換  $(\xi_1, \xi_2) \rightarrow (\eta_1, \xi_2)$  によつて、 $\varepsilon \downarrow 0$  のとき

$$\begin{aligned} & \int_{(-\pi, \pi]^d} e^{i(x-y) \cdot \xi} \frac{\psi_A(\xi) p(\xi; x, y)}{\lambda_1(\xi) - \lambda - i\varepsilon} \frac{d\xi}{(2\pi)^d} \\ &= \int e^{i[(x-y)_1 \xi_1(\eta_1, \xi_2) + (x-y)_2 \xi_2]} \frac{p_A(\eta_1, \xi_2; x, y)}{\eta_1 - i\varepsilon} d\eta_1 d\xi_2 \\ &\rightarrow I_A(x, y) = \int e^{i[(x-y)_1 \xi_1(\eta_1, \xi_2) + (x-y)_2 \xi_2]} p_A(\eta_1, \xi_2; x, y) \left[ \text{p.v.} \frac{1}{\eta_1} + i\pi \delta(\eta_1) \right] d\eta_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

この積分の評価に次の補題をもちいる。

**Lemma.**  $b(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R})$  とし、 $\varphi(x)$  を実数値  $C^\infty(\mathbf{R})$ -関数とする。  $\text{supp } b$  上で  $\varphi'(x) > 0$  とする。このとき任意の自然数  $N$  に対し、 $\nu \rightarrow \pm\infty$  において、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu\varphi(\eta_1)} b(\eta_1) \text{p.v.} \frac{1}{\eta_1} d\eta_1 = \pm i\pi e^{i\nu\varphi(0)} b(0) + O(|\nu|^{-N}).$$

*Proof.*  $\varphi(x) = x$  の場合は、任意の自然数  $N$  で、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu x} b(x) \text{p.v.} \frac{1}{x} dx = -i\sqrt{\pi/2} (\text{sgn } \nu * \hat{b})(-\nu) = \pm i\pi b(0) + O(|\nu|^{-N})$$

as  $\nu \rightarrow \pm\infty$ . ただし  $\hat{b}(\nu)$  は  $b$  のフーリエ変換。一般の  $\varphi$  の場合は、これをテイラー展開で近似すればよい。□

この Lemma より、任意の自然数  $N$  に対し  $(x-y)/|x-y| \sim e_1$  のとき

$$I_A(x, y) = 2i\pi \int_{\mathbf{R}} e^{i[(x-y)_1 \xi_1(0, \xi_2) + (x-y)_2 \xi_2]} p_A(0, \xi_2; x, y) d\xi_2 + O(|x-y|^{-N}).$$

この  $\xi_2$ -積分に停留位相法を適用して、 $G_{\lambda+i0}(x, y)$  の主要部を得る。同様にして、

$$I_{A'} = O(|x-y|^{-N})$$

がわかる。

### 3. The limiting absorption principle

上の証明の副産物として極限吸収原理が直接的に導かれる。

$B_s, s \in \mathbf{R}$ , を

$$B_s := \{v \in L_{loc}^2(\mathbf{R}^d); \|v\|_{B_s} := \sum_{j=1}^{\infty} R_j^s \left( \int_{R_{j-1} < |x| < R_j} |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty\},$$

ただし  $R_0 = 0, R_j = 2^{j-1}, j > 0$ , で与えられる空間とする。共役空間  $B_s^*$  は、

$$B_s^* = \{v \in L_{loc}^2(\mathbf{R}^d); \|v\|_{B_s^*} := \sup_{j \geq 1} R_j^{-s} \left( \int_{R_{j-1} < |x| < R_j} |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty\}$$

である。

**Theorem.**  $\lambda_1(0) < \lambda < \lambda_{conv}$  とする.  $(\frac{d}{d\lambda})^k (L - (\lambda \pm i0))^{-1}$  は  $B_{\frac{1}{2}+k}$  から  $B_{\frac{1}{2}+k}^*$  への有界作用素である.

*Proof.*  $|x - y| < 1$  では,

$$|G_{\lambda+i0}(x, y)| \leq \begin{cases} C|\log|x-y||, & d=2, \\ C|x-y|^{-(d-2)}, & d \geq 3, \end{cases}$$

なので  $G_{\lambda+i0}(x, y)\chi_1(|x-y|)$  を積分核とする作用素は  $L^2(\mathbf{R}^d)$  での有界作用素である.  $\chi_1(r)$  は  $r=0$  近傍で 1 の cutoff 関数である.

$|x-y|$  が大きく  $(x-y)/|x-y| \sim e_1$  のとき, 任意の自然数  $N$  に対して

$$\begin{aligned} G_{\lambda+i0}(x, y) &= I_A(x, y) + O(|x-y|^{-N}) \\ &= 2i\pi \int_{\mathbf{R}^{d-1}} e^{i[(x-y)_1 \xi_1(0, \xi_2) + (x-y)_2 \xi_2]} p_A(0, \xi_2; x, y) d\xi_2 + O(|x-y|^{-N}), \end{aligned}$$

であった. さらにある  $C(\mathbf{T}^d)$ -値の滑らかな  $\varphi, \psi$  を用いて,  $p_A(0, \xi_2; x, y) = \varphi(\xi_2, x)\psi(\xi_2, y)$  とかける.  $\chi$  を  $e_1$  方向の錐に台をもつ cutoff 関数とする. 任意の  $f, g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$  に対し

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}^d} g(x) dx \int_{\mathbf{R}^d} \chi(x-y) I_A(x, y) f(y) dy \\ &= \iint_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^{d-1}} \chi(x-y) e^{i[(x-y)_1 \xi_1(0, \xi_2) + (x-y)_2 \xi_2]} \varphi(\xi_2, x) g(x) \psi(\xi_2, y) f(y) dx dy d\xi_2 \end{aligned}$$

を評価する. プランシェレルの公式と合成積に関する公式により, 上の積分は絶対値において,

$$\leq C \int \|g(x_1, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^{d-1})} dx_1 \int \|f(y_1, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^{d-1})} dy_1 \leq C \|f\|_{B_{\frac{1}{2}}} \|g\|_{B_{\frac{1}{2}}},$$

を得る.  $\square$

#### 4. The one dimensional case

$d=1$  の場合は, バンド構造をなすスペクトルの端点を除いて, グリーン関数は  $\lambda_n$  と対応する固有値をもちいて, 書き下される.

$$L = -\frac{d}{dx} a(x) \frac{d}{dx} + c(x)$$

において,  $a(x) \geq \mu > 0$  は連続関数  $c(x)$  は区分的に連続とする.  $\mu_1 < \nu_1 \leq \mu_2 < \nu_2 \leq \mu_3 < \nu_3 \dots$  があり,

$$\sigma(L) = \cup_{n=1}^{\infty} [\mu_n, \nu_n] \text{ and } [\mu_n, \nu_n] = \{\lambda_n(\xi); 0 \leq \xi \leq \pi\}$$

である.  $n$  が奇数のとき,  $\lambda_n(\xi)$  は  $[0, \pi]$  で増加関数,  $n$  が偶数のとき,  $\lambda_n(\xi)$  は  $[0, \pi]$  で減少関数である.

**Theorem.**  $\lambda$  は  $\sigma(L)$  の内点とする, すなわちある  $n$  で  $\lambda \in (\mu_n, \nu_n)$  か  $\lambda = \nu_n = \mu_{n+1}$  であるとする.

(i) ある  $\xi \in (0, \pi)$  と奇数  $n$  で  $\lambda = \lambda_n(\xi) \in (\mu_n, \nu_n)$  のとき.

$$G_{\lambda+i0}(x, y) = \begin{cases} \frac{ie^{i(x-y)\xi}}{\lambda'_n(\xi)} \frac{u_\xi(x)\overline{u_\xi(y)}}{\|u_\xi\|^2} & y \leq x \\ \frac{ie^{i(y-x)\xi}}{\lambda'_n(\xi)} \frac{u_\xi(y)\overline{u_\xi(x)}}{\|u_\xi\|^2} & x \leq y \end{cases}$$

ここで  $u_\xi$  は  $\lambda_n(\xi)$  に対する固有関数である.

(ii) ある  $\xi \in (0, \pi)$  と偶数  $n$  で  $\lambda = \lambda_n(\xi) \in (\mu_n, \nu_n)$  のとき.

$$G_{\lambda+i0}(x, y) = \begin{cases} \frac{ie^{i(y-x)\xi}}{|\lambda'_n(\xi)|} \frac{u_\xi(y)\overline{u_\xi(x)}}{\|u_\xi\|^2} & y \leq x \\ \frac{ie^{i(x-y)\xi}}{|\lambda'_n(\xi)|} \frac{u_\xi(x)\overline{u_\xi(y)}}{\|u_\xi\|^2} & x \leq y \end{cases}$$

ここで  $u_\xi$  は  $\lambda_n(\xi)$  に対する固有関数である.

(iii)  $\lambda = \lambda_n(\pi) = \nu_n = \mu_{n+1}$  のとき.

$$G_{\lambda+i0}(x, y) = \begin{cases} \frac{ie^{i(x-y)\pi}}{\lambda'_n(\pi)} \frac{u_\pi(x)\overline{u_\pi(y)}}{\|u_\pi\|^2} & y \leq x \\ \frac{ie^{i(y-x)\pi}}{\lambda'_n(\pi)} \frac{u_\pi(y)\overline{u_\pi(x)}}{\|u_\pi\|^2} & x \leq y \end{cases}$$

ここで  $u_\pi = \lim_{\xi \rightarrow \pi} u_\xi$ , ただし  $u_\xi$  は  $\xi = \pi$  の近傍の解析関数で,  $\xi \leq \pi$  で  $(L(\xi) - \lambda_n(\xi))u_\xi = 0$ ,  $\pi < \xi$  で  $(L(\xi) - \lambda_{n+1}(\xi))u_\xi = 0$ , を満たすものである.

(iv)  $\lambda = \lambda_n(0) = \nu_n = \mu_{n+1}$  のとき.

$$G_{\lambda+i0}(x, y) = \begin{cases} \frac{iu_0(y)\overline{u_0(x)}}{|\lambda'_n(0)|\|u_0\|^2} & y \leq x \\ \frac{iu_0(x)\overline{u_0(y)}}{|\lambda'_n(0)|\|u_0\|^2} & x \leq y \end{cases}$$

ここで  $u_\pi = \lim_{\xi \rightarrow \pi} u_\xi$ , ただし  $u_\xi$  は  $\xi = 0$  の近傍の解析関数で,  $0 \leq \xi$  で  $(L(\xi) - \lambda_n(\xi))u_\xi = 0$ ,  $\xi < 0$  で  $(L(\xi) - \lambda_{n+1}(\xi))u_\xi = 0$  を満たすものである.

## REFERENCES

- [GN] C. Gérard and F. Nier, *The Mourre theory for analytically fibered operators*, J. Funct. Anal. **152** (1998), 202–219.
- [Ka] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators (Second Edition)*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [KS] W. Kirsch and B. Simon, *Comparison theorems for the gap of Schrödinger operators*, J. Funct. Anal. **75** (1987), 396–410.
- [MT] M. Murata and T. Tsuchida, *Asymptotics of Green functions and Martin boundaries for elliptic operators with periodic coefficients*, J. Differential Equations **195** (2003), 82–118.
- [Pi] R.G. Pinsky, *Second order elliptic operators with periodic coefficients: Criticality theory, perturbations, and positive harmonic functions*, J. Funct. Anal. **129** (1995), 80–107.
- [Th] L. E. Thomas, *Time dependent approach to scattering from impurities in a cristal*, Comm. Math. Phys. **33** (1973), 335–343.